基于多阶分数离散切比雪夫变换和产生序列的图像加密方法

肖斌[1]，史文明[1]，李伟生[1]，马建峰[2]
（1. 重庆邮电大学计算智能重点实验室，重庆 400065；2. 西安电子科技大学计算机学院，陕西 西安 710071）

摘 要：基于分数阶变换的图像加密方法近些年被广泛研究和使用，然而现有的基于分数阶变换的图像加密技术多在复数域进行，加密后的图像既包含了相位信息也包含了振幅信息，不利于传输和存储。另外，一些满足保实性的加密方法，则存在密钥相对单一、敏感性不足等问题。基于此，提出一种基于多阶分数离散切比雪夫变换和产生序列的图像加密方法，该方法使用随机生成的行、列分数阶向量以及通过混沌序列生成的产生序列作为密钥对图像进行加密，在满足实值传输的同时大大扩展了密钥空间。实验结果进一步表明，该加密方法可以抵抗多种攻击，解密后的图像几乎无失真，具有很好的加密效果以及足够的安全性和顽健性。

关键词：分数阶；产生序列；图像加密；离散切比雪夫变换
中图分类号：TP309.7
文献标识码：A
doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2018072

Image encryption method based on multiple-order fractional discrete Tchebichef transform and generating sequence

XIAO Bin[1], SHI Wenming[1], LI Weisheng[1], MA Jianfeng[2]
1. Chongqing Key Laboratory of Computational Intelligence, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China
2. School of Computer Science and Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China

Abstract: Fractional transform based image encryption methods have been widely studied in recent years. However, most of the existing fractional transform based image encryption methods are defined in the complex field. Thus, the encrypted images contain both phase and amplitude information, which is not conducive to transmission and storage. Moreover, some encryption methods that meet the requirements of reality-preserving have problems of relatively single keys, lacking of sensitivity and so on. An image encryption method was proposed based on multiple-order fractional discrete Tchebichef transform and generating sequence. The proposed method used randomly generated row and column vectors and generating sequence generated by Chaotic sequences as keys to encrypt images, which not only satisfied property of reality-preserving transmission but also greatly expanded the key space. The experimental results further demonstrate that the proposed encryption method can resist a variety of attacks, and decrypted images are almost non-distored, which indicate excellent encryption effect, sufficient security and robustness of the method.

Key words: fractional order, generating sequence, image encryption, discrete Tchebichef transform

1 引言

随着网络和多媒体技术的快速发展，信息的获取和传输变得日益快捷方便。图像因其直观生动、信息丰富，得以在互联网中广泛传播。然而很多图像由于涉及多种隐私和利益，并不想被非法用户获取到，因此，如何安全地在网络中传输图像成为一个非常重要的课题。图像加密技术可以在图像传播

收稿日期：2017-10-12；**修回日期**：2018-01-03
通信作者：肖斌，xiaobin@cqupt.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金资助项目（No.61572092, No.U1401252）；国家重点研发计划基金资助项目（No.2016YFC1000307-3）
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61572092, No.U1401252), The National Science & Technology Major Project (No.2016YFC1000307-3)

前进行加密以隐藏原始信息，是一种有效解决图像安全问题的方法。

目前，图像的加密可以在空间域和变换域进行，空间域主要利用图像的置乱、替代和扩散完成加密操作。最初的图像置乱大多基于 Arnold 变换、幻方变换等，近些年，提出了一些结合混沌理论的空间域图像加密算法[1,2]，由于其密钥敏感性和置乱特性强使这类算法具有较高的研究价值和重要的研究意义。变换域加密算法则从图像变换矩阵的特征出发，使用密钥生成新的变换矩阵对图像进行变换，从而将原本清晰可辨的图像变成类似于随机噪声信息，这种加密方法具有加密效率较高、抗干扰性好的特点，而且便于压缩实现。目前，常用的图像变换包括傅里叶变换[3]、小波变换[4]、离散余弦变换（DCT）[5]等。此外，随着量子信息理论的逐步建立和发展，结合量子信息的优点使量子图像处理超越经典图像处理的局限也是人们努力的方向，量子图像加密[6~9]也逐渐成为研究的热点方向。但是因为量子图像加密中涉及的诸多问题尚未解决，例如量子图像的有效表示、量子图像的完备变换集合以及量子图像安全的信息论模型等，量子图像加密有待进一步深入研究。

本文采用的分数阶变换[10~12]是对传统图像变换的推广，因其具有分数阶敏感性而被引入图像加密领域[13~15]。目前，基于分数阶傅里叶变换的数字图像加密算法的研究很多[16~20]，例如 Unnikrishnan 等[20]提出了双随机相位编码方案，使用 2 种独立的随机相位掩模来把图像加密成平稳白噪声；Joshi 等[21]提出了傅里叶变换、径向希尔伯特变换相结合的图像加密算法；Lang 等[22]提出了基于多参数离散分数存储变换和混沌的图像加密算法。这些图像加密算法有一个很大的局限就是加密后的图像是复值图像，同时包含了幅值和相位信息，非常不利于传输和存储。尤其是随着人们对实时传输的要求越来越高，提出一种满足实数变换、加密安全性高、抗噪性强、计算速度快的图像加密技术非常有必要。

近些年，有学者提出了基于实数域分数阶图像变换的加密方法，如基于保实分数离散余弦变换的图像加密算法[23,24]满足了实数变换的要求，显示出良好的加密效果。离散切比雪夫变换（DTT，discrete Tchebichef transform）是近些年提出的一种新的图像变换技术，其变换核函数由不同阶数的离散切比雪夫正交多项式组成，具有实数域变换、快速迭代计算和良好的图像重建能力[25,26]等特性。相比于许多经典的图像变换，它还具有计算时间复杂度低、便于整数实现等优点，在图像处理中应用得越来越广泛。本文在将 DTT 推广到分数阶（FrDTT, fractional DTT）的基础上，首次提出基于多阶分数离散切比雪夫变换（MFrDTT）和产生序列（GS, generating sequence）的图像加密方法，使用随机生成的行列分数阶向量替换单一分数阶，结合二维 Logistic 混沌序列生成的产生序列对图像做 2 次分数阶离散切比雪夫变换进行加密。多参数分数阶离散切比雪夫变换可以保证实值输入、实值输出。同时，引入的混沌序列对初始值和系统参数高度敏感，GS 作为密钥使用，进一步扩展了加密算法的密钥空间，提高了算法的安全性。

2 离散切比雪夫变换

离散切比雪夫变换是由 Mukundan 等[27]在 2001 年提出的一种新的图像变换技术，它由不同阶数的离散切比雪夫正交多项式组成，具有快速迭代计算、较高的去相关性、无数值近似和极强的图像重构能力等优点，被广泛应用于图像分析、识别与压缩中[28~31]。n 阶离散切比雪夫多项式定义为

$$t_n(x;N)=\sum_{k=0}^{N-1}a_{k,n}x^k=(1-N)_{n3}F_2(-n,-x,1+n;1,1-N;1) \tag{1}$$

$${}_xF_y(a_1,\cdots,a_x;b_1,\cdots,b_y;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k(a_2)_k(a_x)_kz^k}{(b_1)_k(b_2)_k(b_y)_kk!} \tag{2}$$

$$t_n(x)=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{N-1-k}{n-k}\binom{n+k}{n}\binom{x}{k} \tag{3}$$

$$t_n(x)=\frac{(a_1x+a_2)t_{n-1}(x)+a_3t_{n-2}(x)}{n},n=2,3,\cdots,N-1 \tag{4}$$

其中，n, x=0,1,2,⋯,N−1, 超函数 ${}_xF_y$ 定义为式(2)。$(a)_k=\dfrac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}=a(a+1)\cdots(a+k-1)$ 表示阶乘幂。离散切比雪夫多项式还可以写成式(3)。另外，它还可以通过递推式(4)进行计算。其中

$$t_0(x)=\frac{1}{\sqrt{N}},t_1(x)=\frac{2x+1-N}{N}\sqrt{\frac{3}{N(N^2-1)}} \tag{5}$$

$$a_1=\frac{2}{n}\sqrt{\frac{4n^2-1}{N^2-n^2}},a_2=\frac{1-N}{n}\sqrt{\frac{4n^2-1}{N^2-n^2}} \tag{6}$$

$$a_3=\frac{1-n}{n}\sqrt{\frac{2n+1}{2n-3}}\sqrt{\frac{N^2-(n-1)^2}{N^2-n^2}} \tag{7}$$

归一化的 0~5 阶离散切比雪夫多项式变换曲线如图 1 所示。

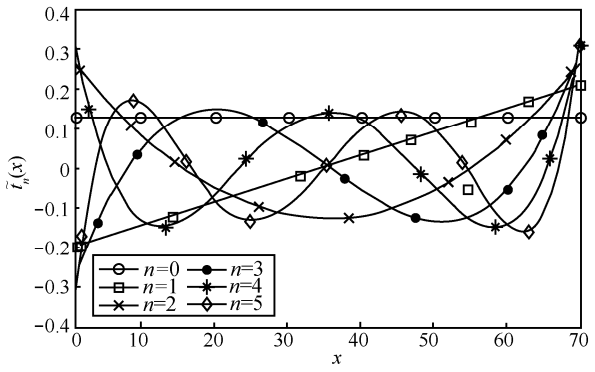


图 1　归一化的 0~5 阶离散切比雪夫多项式变换曲线

对于数字图像 $f(i,j)$，它的 DTT 可以定义为

$$F(m,n)=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}t_m(x)t_n(y)f(x,y) \tag{8}$$

其中，$m=0,1,\cdots,M-1;n=0,1,\cdots,N-1$。对应的离散切比雪夫反变换（iDTT, inverse DTT）为

$$f(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}F(m,n)t_m(x)t_n(y) \tag{9}$$

其中，$x=0,1,\cdots,M-1;y=0,1,\cdots,N-1$。在实际应用中，图像的 DTT 可以用矩阵表示为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{f}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

相应的反变换（iDTT）为

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{C} \tag{11}$$

其中，$\boldsymbol{C}$ 为 DTT 矩阵，且 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{-1}$。对于典型的 8×8 的 DTT 矩阵 $\boldsymbol{C}$，有

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}
0.353\,6 & 0.353\,6 & 0.353\,6 & 0.353\,6 & 0.353\,6 & 0.353\,6 & 0.353\,6 & 0.353\,6\\
-0.540\,1 & -0.385\,8 & -0.231\,5 & -0.077\,2 & 0.077\,2 & 0.231\,5 & 0.385\,8 & 0.540\,1\\
0.540\,1 & 0.077\,2 & -0.231\,5 & -0.385\,8 & -0.385\,8 & -0.231\,5 & 0.077\,2 & 0.540\,1\\
-0.430\,8 & 0.307\,7 & 0.430\,8 & 0.184\,6 & -0.184\,6 & -0.430\,8 & -0.307\,7 & 0.430\,8\\
0.282\,0 & -0.523\,8 & -0.120\,9 & 0.362\,6 & 0.362\,6 & -0.120\,9 & -0.523\,8 & 0.282\,0\\
-0.149\,8 & 0.492\,2 & -0.363\,8 & -0.321\,0 & 0.321\,0 & 0.363\,8 & -0.492\,2 & 0.149\,8\\
0.061\,5 & -0.307\,7 & 0.553\,9 & -0.307\,7 & -0.307\,7 & 0.553\,9 & -0.307\,7 & 0.061\,5\\
-0.017\,1 & 0.119\,5 & -0.358\,5 & 0.597\,4 & -0.597\,4 & 0.358\,5 & -0.119\,5 & 0.017\,1
\end{bmatrix}$$

3　多阶分数离散切比雪夫变换

FrDTT 是对传统 DTT 的推广。对于大小为 $N\times N$ 的 DTT 矩阵 $\boldsymbol{C}$，它满足 3 个性质：1) 实数矩阵；2) 正交矩阵；3) 酉矩阵。酉矩阵的特性使 $\boldsymbol{C}$ 的特征值 λ_k 分布在单位圆上，即 $\lambda_k=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k}$（$\varphi_k$ 是实数）。

对 DTT 矩阵进行特征值分解，得到对应特征值矩阵 $\boldsymbol{D}$ 以及特征向量矩阵 $\boldsymbol{V}$，满足

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}=\sum_n\boldsymbol{U}_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n} \tag{12}$$

其中，$\boldsymbol{V}$ 是酉矩阵，由 $\boldsymbol{C}$ 的 N 个特征向量 $\boldsymbol{u}_n$ 构成，$\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的共轭转置矩阵，满足 $\boldsymbol{U}_n\triangleq\boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_n^{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{D}$ 是对角线为特征值 λ_k 的对角矩阵。

为了得到同样满足实矩阵、正交矩阵、酉矩阵这 3 个特性的 FrDTT 矩阵，本文在矩阵特征分解的基础上把特征值 $\lambda_k=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k}$ 替换成它的 α 次方（$\alpha\in R$），即对角矩阵 $\boldsymbol{V}$ 被它的 α 次幂代替，从而得出 FrDTT 矩阵 $\boldsymbol{C}_\alpha$ 的定义式为

$$\boldsymbol{C}_\alpha=\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}^\alpha\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}=\sum_{k=0}^{N-1}\lambda_k^\alpha\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{H}},k=0,\cdots,N-1 \tag{13}$$

可以证明，$\boldsymbol{C}_\alpha$ 同样满足正交性以及指数可加性，即

$$\boldsymbol{C}_\alpha\boldsymbol{C}'_\alpha=\boldsymbol{C}_\alpha\boldsymbol{C}_{-\alpha}=\boldsymbol{C}_0=\boldsymbol{I} \tag{14}$$

实际上，矩阵 $\boldsymbol{C}_\alpha$ 的特征值构成共轭对，设 μ_1 和 μ_{-1} 分别表示特征值 1 和−1 的多重性，根据特征值的分布，可以将其写为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{C}_\alpha=2R[\sum_{n=1}^{K}\boldsymbol{U}_n\lambda_n^\alpha]+\boldsymbol{V}_1(1)^\alpha+\boldsymbol{V}_{-1}(-1)^\alpha,\\&K=\frac{N-\mu_1-\mu_{-1}}{2}\end{aligned} \tag{15}$$

其中，$\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_{-1}$ 分别是 μ_1 个特征值为 1 以及 μ_{-1} 个特征值为−1 的矩阵 $\boldsymbol{U}_n$ 的和。值得一提的是，α 是

非自然数时，$(\pm 1)^{\alpha}=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}2\pi\alpha}$ 是复数，从而矩阵 $\boldsymbol{C}_{\alpha}$ 也是复数矩阵。为了得到总是满足实数矩阵的 FrDTT 矩阵，矩阵的特征值应不包含 ±1。相较于 DCT 在矩阵维度信号长度 N 是 4 的倍数时才满足不含特征值 ±1，DTT 具有一定的优势，它满足在矩阵维度为偶数时，即 $N=2N_0$ 时不包含特征值 ±1，在实际应用中更加灵活方便。

进一步地，如果将单一分数阶 α 扩展到分数阶向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{N-1}\}$，可以得到多阶分数离散切比雪夫变换（MFrDTT, multiple fractional DTT）的定义式为

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}=\sum_{k=0}^{N-1}\lambda_k^{\alpha_k}\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{H}},k=0,\cdots,N-1 \quad (16)$$

接下来，引入产生序列的概念，因为 DTT 的特征向量基是唯一的，所以 MFrDTT 的不唯一性主要取决于特征值的实数次幂，又因为 $\lambda_k=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}$，所以 λ_n^{α} 的取值可以表示为

$$\lambda_n^{\alpha}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_n+2\pi q_n)\alpha},q_n\in Z,n=0,2,\cdots,N-1 \quad (17)$$

其中，q_n 是任意的整数，而序列 $\boldsymbol{q}=(q_1,\cdots,q_{\frac{N}{2}})$ 称为 MFrDTT 的产生序列（GS），不同的产生序列和不同的分数阶将会产生不同的变换矩阵，从而可以应用到图像加密中来。

由式(14)可知，$\boldsymbol{C}_{\alpha}$ 的逆矩阵可以通过它的负阶数矩阵 $\boldsymbol{C}_{-\alpha}$ 求得。用 p 表示分数阶，则对于图像 $f(x,y)$，它的二维 FrDTT 的定义可以表示为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}_{p_1,q_1}\boldsymbol{f}\boldsymbol{C}_{p_2,q_2} \quad (18)$$

进一步地，将分数阶 p 推广到多阶分数向量 $\boldsymbol{p}$，可以得到二维 MFrDTT 的定义为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{q}_1}\boldsymbol{f}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{q}_2} \quad (19)$$

其中，$\boldsymbol{p}_1=\{p_{1,0},p_{1,1},\cdots,p_{1,N-1}\}$，$\boldsymbol{p}_2=\{p_{2,0},p_{2,1},\cdots,p_{2,N-1}\}$，$\boldsymbol{q}_1=\{q_{1,0},q_{1,1},\cdots,q_{1,N-1}\}$，$\boldsymbol{q}_2=\{q_{2,0},q_{2,1},\cdots,q_{2,N-1}\}$。

4　图像加密应用

4.1　二维 Logistic 映射与 GS

混沌系统是一种非线性确定性系统，具有非周期性、对系统参数高度敏感性以及序列长期不可预测性等特点，在加密中经常被用来生成随机序列。本文选择具有较多初始值及系统参数的二维 Logistic 映射得到混沌序列，进而生成分数阶离散 Tchebichef 矩阵中的 GS 序列，其迭代式为

$$\begin{cases}x_{n+1}=a_1x_n(1-x_n)+b_1y_n^2\\ y_{n+1}=a_2y_n(1-y_n)+b_2(x_n^2+x_ny_n)\end{cases} \quad (20)$$

其中，a_1、a_2、b_1、b_2 是系统参数，$x_n,y_n\in(0,1)$，$n=0,1,2\cdots$ 是随机迭代值，x_0、y_0 是初始值。由于 b_1、b_2 的取值范围有限，本文不将其作为密钥，实验中设定 $b_1=0.18$、$b_2=0.14$，其他系统参数和初始值作为密钥使用，分别设定为 $a_1=3.12$、$b_1=3.34$、$x_0=0.678\,4$、$y_0=0.789\,4$。通过式(20)迭代 $\max\left\{\frac{M}{2},\frac{N}{2}\right\}$ 次分别得到 2 个随机序列，长度为 $\frac{M}{2}$ 的产生序列 $\boldsymbol{q}_x=\left\{q_i\mid i=0,1,\cdots,\frac{M}{2}\right\}$ 和长度为 $\frac{N}{2}$ 的产生序列 $\boldsymbol{q}_y=\left\{q_j\mid j=0,1,\cdots,\frac{N}{2}\right\}$。

4.2　加解密算法

综上所述，不同的分数阶和产生序列会生成不同的 MFrDTT 矩阵，这样的特性可以很好地应用到图像加密中。本节介绍一种新的基于 MFrDTT 的图像加密方法并给出加解密过程的详细步骤。对于一幅大小为 $M\times N$ 的图像，整体加解密过程如图 2 所示。加密流程的详细步骤如算法 1 所述。解密过程就是对加密过程的逆变换，基于 MFrDTT 满足指数可加性，选取分数阶 $\boldsymbol{p}_1'=-\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2'=-\boldsymbol{p}_2$ 即可，图像的解密算法步骤如算法 2 所示。

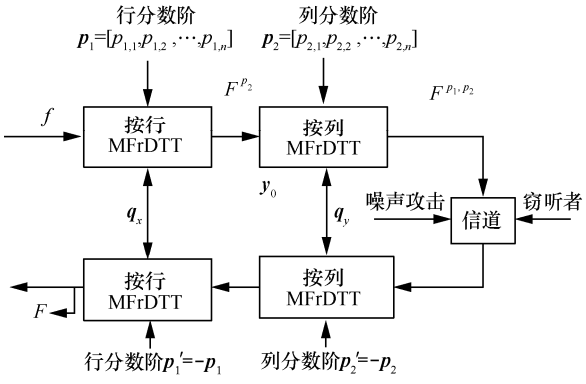


图 2　基于 MFrDTT 和产生序列的图像加解密流程

算法 1　MFrDTT 图像加密算法

输入　原始图像 f

输出　经过 MFrDTT 加密后的图像 F

步骤 1　利用随机数产生（0,1）之间互不相关

的 2 个随机数序列 $\boldsymbol{q}_x$ 和 $\boldsymbol{q}_y$，长度分别为 $\frac{M}{2}$、$\frac{N}{2}$。由于产生序列必须为整数，算法选择将序列中大于 0.5 的统一设为 1，否则统一设为 0。

步骤 2　为简化选择范围，本文在（0,3）的分数阶范围内，利用随机数生成 M 维行向量 $\boldsymbol{p}_1=[p_{1,1}, p_{1,2},\cdots,p_{1,m}]$ 和 N 维列向量 $\boldsymbol{p}_2=[p_{2,1},p_{2,2},\cdots,p_{2,n}]'$，分别对应式(1)中的生成序列 $\boldsymbol{q}_x$、$\boldsymbol{q}_y$。

步骤 3　对图像 f 的第 $i(i=0,1,\cdots,M-1)$ 行进行一维 MFrDTT，变换的分数阶为 $\boldsymbol{p}_1=[p_{1,1}, p_{1,2},\cdots,p_{1,m}]$，对应的生成序列为 $\boldsymbol{q}_x$，变换后的图像为 F_1。

步骤 4　对图像 f 的第 $j(j=0,1,\cdots,N-1)$ 列进行一维 MFrDTT，变换的分数阶为 $\boldsymbol{p}_2=[p_{2,1},p_{2,2},\cdots,p_{2,m}]$，对应的生成序列为 $\boldsymbol{q}_y$，变换后的图像为 F_2。F_2 即为加密后的图像。

算法 2　MFrDTT 图像解密算法

输入　MFrDTT 加密后的图像 F

输出　解密后的图像 f

步骤 1　利用加密过程中的产生序列 $\boldsymbol{q}_x$、$\boldsymbol{q}_y$，分数阶 $\boldsymbol{p}_1'=-\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2'=-\boldsymbol{p}_2$ 得到 MFrDTT 矩阵。

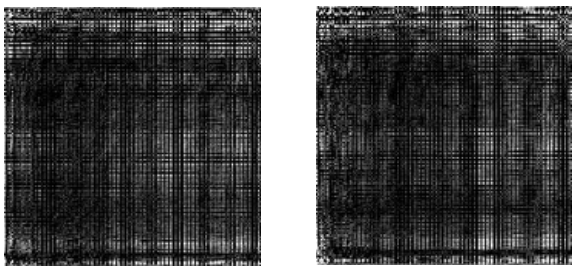
步骤 2　对加密后的图像 F_2 的第 $j(j=0,\ 1,\cdots,N-1)$ 列进行 MFrDTT，分数阶为 $\boldsymbol{p}_2$，产生序列为 $\boldsymbol{q}_y$，变换后的图像为 F_1'。

步骤 3　对图像 F_1' 的第 $i(0,1,\cdots,M-1)$ 行继续进行 MFrDTT，分数阶为 $\boldsymbol{p}_1$，产生序列为 $\boldsymbol{q}_x$，变换后的图像为 f'，即解密后的图像。

为了解密出原始图像，必须获得正确的密钥。本文使用 256 像素×256 像素大小的“Lena”和“Peppers”作为输入图像，如图 3 所示。加密后的图像如图 4 所示。从图 4 可以看出，加密后的图像无法辨认出原始图像的任何信息，这表明原始图像的信息被成功地保护起来。

(a)“Lena”　　(b)“Peppers”

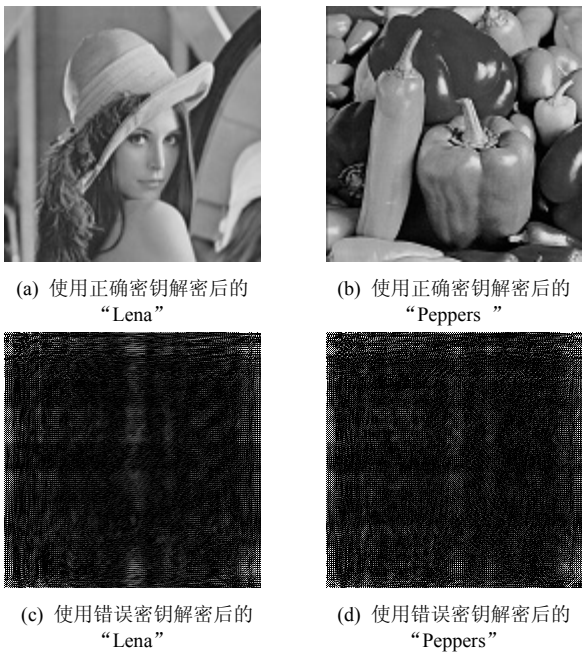
图 3　原始图像



(a) 加密后的“Lena”　　(b) 加密后的“Peppers”

图 4　MFrDTT 加密后的图像

在解密实验中，本文首先使用正确的密钥来解密，解密后的图像“Lena”“Peppers”分别如图 5(a)和图 5(b)所示，可以看出，正确密钥成功恢复出原始图像。作为对比，本文使用错误的分数阶密钥 $\boldsymbol{p}_x'$、$\boldsymbol{p}_y'$ 来解密，其中，$\boldsymbol{p}_x'=\boldsymbol{p}_x+\delta$，$\boldsymbol{p}_y'=\boldsymbol{p}_y+\delta$，$\delta=\{0.06\}$ 为偏差。解密后的图像“Lena”“Peppers”分别如图 5(c)和图 5(d)所示。可以看到，通过错误密钥解密后的图像已经完全无法辨认，不能获得原始图像的任何信息，从而保护了原始图像的安全。



(a) 使用正确密钥解密后的“Lena”　　(b) 使用正确密钥解密后的“Peppers ”

(c) 使用错误密钥解密后的“Lena”　　(d) 使用错误密钥解密后的“Peppers”

图 5　使用 MFrDTT 解密后的图像

4.3　统计分析

图像的灰度直方图是图像分析中的另一项重要特征，它反映了不同图像的不同灰度值分布情况。图 6 和图 7 是原始图像和密文图像的灰度直方图。从实验结果可以看出，本文提出的基于 MFrDTT 的加密方法对这 2 种图像加密后得到的密文图像灰度直方图非常相似。另外，它们和原始图像的灰度

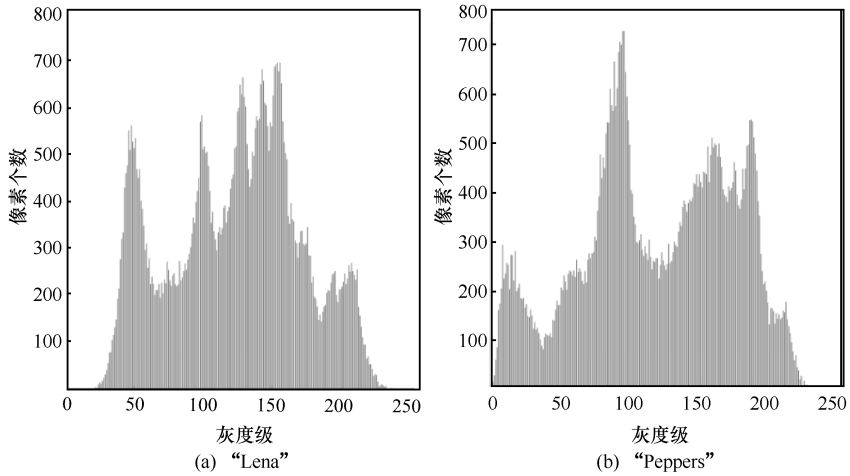


图 6　原始图像的灰度直方图

直方图又有很大差异。大量实验后得出一致的结果，图像经过加密后，灰度直方图发生了巨大的变化，不同图像加密后的密文图像的灰度直方图又具有相似的直方图分布。经分析可知，本文提出的基于 MFrDTT 的图像加密算法不仅非常好地隐藏了图像的原始信息，同时可以抵抗统计攻击。

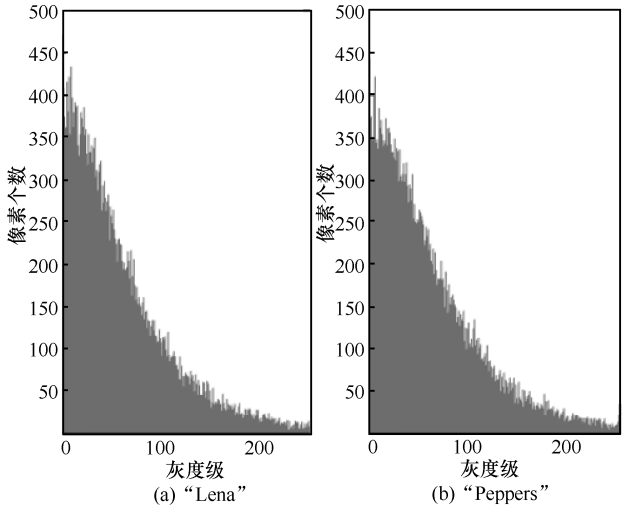


图 7　密文图像的灰度直方图

通常情况下，图像的相邻像素之间具有很高的相关性，攻击者很容易通过像素相关性获取整幅图像。为了检验本文提出的基于 MFrDTT 方法加密后得到的密文图像的去相关性，随机从原始图像和密文图像的水平方向、垂直方向以及对角线方向选取 1 000 对相邻像素作为样本，计算 3 个方向的相关系数，图 8 是加密前后“Lena”图像在垂直方向上相邻像素间的相关性分析，可以看出，原始图像具有很高的相关性，密文图像则找不出任何规律。进一步地，表 1 列出了 3 个方向上的相关系数。从表 1 可以看出，原始图像 3 个方向上相邻像素的相关系数接近 1，而密文图像的相关系数却近似为 0，这说明所提加密算法很好地降低了像素间的相关性，可以抵抗利用图像相关性的攻击。

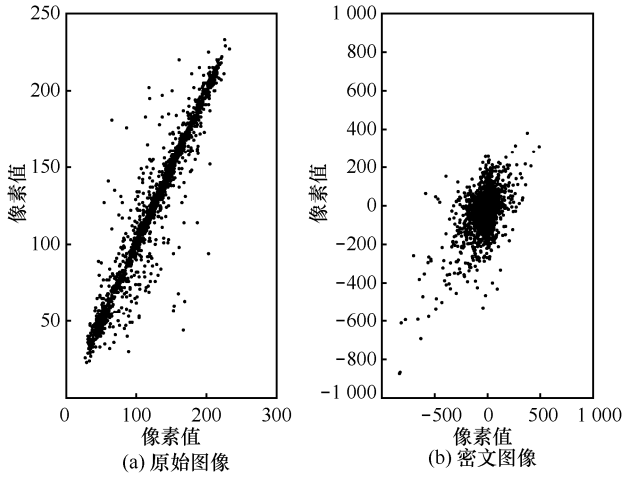


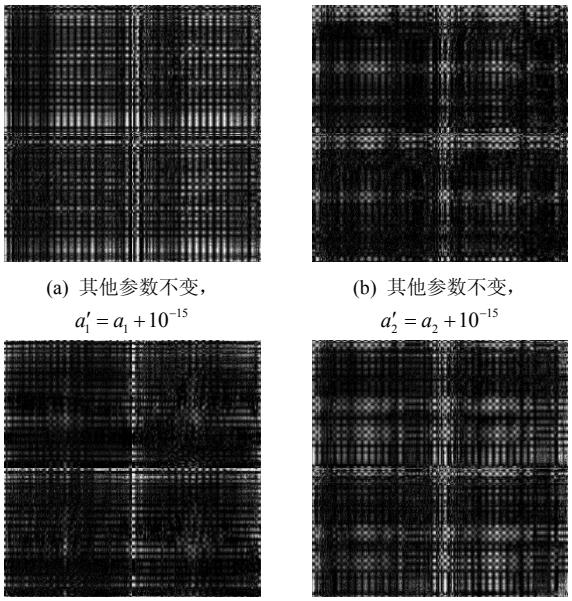
图 8 “Lena”图像加密前后图像垂直方向上相邻像素相关性分析

表 1　原始图像“Lena”和密文图像在不同方向上相邻像素的相关系数

图像类型	水平方向	垂直方向	对角线方向
明文图像	0.933 8	0.964 9	0.912 3
密文图像	0.047 2	−0.058 4	−0.069 3

4.4　敏感性分析

因为 GS 是由二维 Logistic 混沌序列生成，在解密行列分数阶均正确的前提下，实验改变二维 Logistic 混沌映射的初始值和系统参数，测试其作为密钥的敏感性，实验结果如图 9 所示。



(a) 其他参数不变，$a_1' = a_1 + 10^{-15}$　(b) 其他参数不变，$a_2' = a_2 + 10^{-15}$

(c) 其他参数不变，$x_0' = x_0 + 10^{-15}$　(d) 其他参数不变，$y_0' = y_0 + 10^{-15}$

图 9　不同条件下的解密图像

从图 9 可以看出，即使将初始值和系统参数的偏差调小至10^{-15}，仍然无法从解密的图像中获得任何有用信息。为了进一步验证密钥的敏感性，本文通过解密图像与原始图像间的均方误差（MSE）进行定量分析，*MSE* 的计算式为

$$MSE = \frac{1}{MN}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}|C(i,j) - I(i,j)|^2 \qquad (21)$$

其中，$C(i,j)$ 为解密图像灰度值，$I(i,j)$ 为原始图像灰度值。实验中通过对系统参数和初始值分别加上偏差δ，计算其对 *MSE* 的影响，结果如图 10 所示。

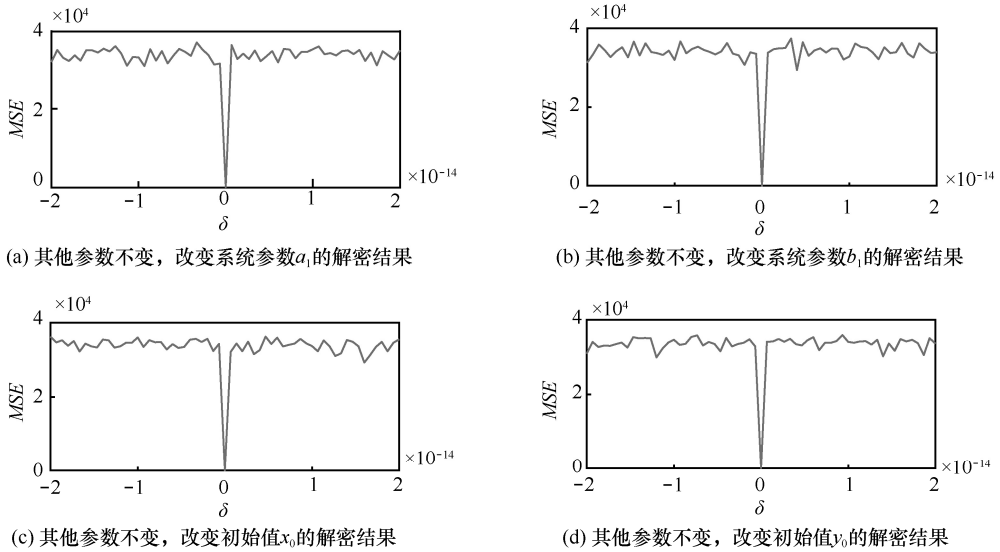
可以看到，当偏差δ不为 0 时，*MSE* 非常大，达到10^4的数量级，进一步说明了即使是存在极小的误差，解密图像也依然无法得到原始图像的任何信息。而当偏差$\delta = 0$时，*MSE* 接近于 0，说明正确的密钥下解密的图像与原始图像几乎相同。因此可以得出通过二维 Logistic 控制生成 GS 进行加密具有非常高的安全性的结论。

4.5　密钥空间分析

本文提出的图像加密方法以多参数分数阶 $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$ 和二维 Logistic 混沌映射的初始值和系统参数为密钥对图像进行加密，不同的分数阶和不同混沌映射生成的产生序列组合下的特征值λ不同，从而使变换矩阵 $\boldsymbol{C}_\alpha$ 不同。通常情况下，安全加密系统的密钥空间应该要大于 2^{100}，本文首先利用平均绝对误差（MAE）来分析混沌序列的密钥空间，定义为

$$MAE = \frac{1}{l}|k_i - \tilde{k}_i| \qquad (22)$$

其中，k_i、$\tilde{k}$ 分别是二维 Logistic 混沌序列的第 i 个值，l 是混沌序列的长度。当 *MAE*=0 时，d 的值记为 d_0，相应的密钥空间就是$\frac{1}{d_0}$，4.3 节的实验中，d_0 的值（初始值和系统参数）分别为3.25×10^{-17}、1.58×10^{-17}、2.13×10^{-16}、1.86×10^{-16}，综合来看，密钥空间为4.92×10^{64}，另外，分数阶定义在实数域，也具有海量密钥空间，所以本文所提加密方法足以抵抗计算机穷举攻击。



(a) 其他参数不变，改变系统参数a_1的解密结果　(b) 其他参数不变，改变系统参数b_1的解密结果

(c) 其他参数不变，改变初始值x_0的解密结果　(d) 其他参数不变，改变初始值y_0的解密结果

图 10　混沌映射中不同初始值和系统参数误差下的 *MSE* 曲线

目前，大部分的图像加密算法的主要密钥包括分数阶和随机相位和振幅掩模，虽然密钥空间很大，但是随机相位和振幅掩模的大小与原始图像的大小相同，对于大量图像加密而言，数据量过大，给密钥的传输带来了很大不便。本文所提方法行列密钥的长度只有相应变换矩阵行列长度的一半，只占用较小的存储空间，Logistic 序列只需存储初始值和系统参数，非常利于传输和存储。

5 与其他图像加密算法的分析比较

由于 DCT 在图像压缩领域的广泛应用，基于 MFrDCT 的图像加密研究有很多。DTT 与 DCT 具有相似的变换矩阵，但是 DTT 具有更高的能量紧致性、迭代计算速度更快等优点。因为基于 MFrDCT 与 MFrDTT 的加密方法同样满足保实变换，本文主要在与 MFrDCT 对比的基础上，从几个方面与经典的分数阶图像加密算法进行了对比分析。

5.1 分数阶变换时间复杂度

对于不同图像加密中使用的不同分数阶变换矩阵，其生成的时间复杂度是不同的。本文首先从时间复杂度入手分析多种加密方法中分数阶变换性能。实验中使用不同尺寸的“Lena”图像，在主频为 3.5 GHz 的 Intel i5 处理器，内存为 16 GB，操作系统为 Windows 7 的计算机中运行 Matlab 2014b 并统计时间。实验中为了产生 2 个图像变换矩阵，分数阶向量 $\boldsymbol{a}$ 使用随机函数在 0.4~0.6 产生，分数阶向量 $\boldsymbol{b}$ 使用随机函数在 0.5~0.8 产生，具体的时间统计如表 2 所示。

从表 2 可以看出，基于离散 Tchebichef 多项式的快速迭代性，MFrDTT 在不同分数阶变换矩阵的生成中用时最短，相对其他几种变换具有优势，这在处理大量数据加密时可以节省宝贵的时间。

5.2 解密图像质量

实验中首先选取 5 组大小同为 256 像素×256 像素的测试图像，在正确密钥下进行解密，计算 *PSNR* 值。表 3 分别展示了 5 组图像用 MFrDTT 和 MFrDTT 进行加密再解密后的 *PSNR* 值。从表 3 可以看出，2 种算法均有较好的解密效果。由实际计算可知，虽然两者解密后的图像均可取得较高的 *PSNR* 值，但本文提出的基于 MFrDTT 的图像加密算法还是在各组测试图像中略胜一筹，解密的图像质量要优于 MFrDCT。

表 3 MFrDTT 与 MFrDCT 对多组图像解密后的 *PSNR*

图像编号	MFrDCT 解密结果/dB	MFrDTT 解密结果/dB
1	245.32	253.77
2	242.67	255.29
3	245.17	255.01
4	242.68	254.54
5	243.55	254.55

5.3 抗噪声性能

由于图像在传输过程中很容易受到噪声的干扰，这样会影响解密图像的质量。所以衡量一个图像加密方法的好坏应当验证它的抗噪声能力。本文选取均值为 0、方差为 1 的高斯白噪声通过式(23)加入“Lena”的密文图像进行噪声干扰。

$$A' = A(1 + kG) \tag{23}$$

其中，A 和 A' 是密文图像和加噪后的密文图像，k 是嵌入强度。通过正确密钥进行解密得到解密图像，计算解密图像的峰值信噪。图 11 分别给出了本文提出的方法加密后的图像在高斯噪声强度 k 为 0.05、0.10、0.20、0.50、0.80、1.00 时的正确解密图像。

从图 11 可以看出，虽然随着密文中所加的高斯噪声的强度增强，解密后的图像质量逐渐下降，但是当噪声强度为 0.10 时，图像清晰可见，即使强度增加到 1.00，依然可以依稀辨认出原始图像信息，由此可见，本文提出的加密方法具有良好的抗噪声性能。

为了进一步和当前的经典分数阶图像加密方法对比，实验分别计算了在不同强度噪声下 MFrDCT、MFrDFT、MFrDTT 解密后图像的 *PSNR* 值，

表 2 不同分数阶变换矩阵的计算时间对比

图像尺寸	计算时间/s				
	MFrDFT	MFrDCT	MFrDST	MFrDHT	MFrDTT
128 像素×128 像素	0.411 2	0.467 2	0.370 8	0.458 0	0.291 4
256 像素×256 像素	4.217 6	4.256 8	3.266 2	4.186 4	2.916 6
512 像素×512 像素	74.403 0	72.36 5	63.95 1	71.40 7	58.371 6

(a) k=0.05(*PSNR*=34.56 dB)　(b) k=0.10(*PSNR*=27.72 dB)　(c) k=0.20(*PSNR*=21.99 dB)

(d) k=0.50(*PSNR*=14.36 dB)　(e) k=0.80(*PSNR*=9.04 dB)　(f) k=1.00(*PSNR*=7.07 dB)

图 11　加不同强度高斯噪声后的解密图像

如表 4 所示。从表 4 可以看出，虽然在噪声强度为 0.80 和 1.00 时，MFrDFT 解密图像 *PSNR* 值更高，但是本文提出的基于 MFrDTT 的图像加密方法在多数情况下都要优于另外两者，具有较好的顽健性。

表 4　MFrDCT 和 MFrDTT 加密的“Lena”在不同强度高斯噪声干扰后的解密图像质量

噪声强度	解密图像质量/dB		
	MFrDCT	MFrDFT	MFrDTT
0.05	32.85	33.30	34.56
0.10	26.72	27.23	27.72
0.20	20.64	21.38	21.99
0.50	12.74	14.05	14.36
0.80	8.44	10.98	9.04
1.00	6.85	9.69	7.07

6　结束语

本文在定义了分数阶离散切比雪夫变换的基础上，首次提出一种基于多阶分数离散切比雪夫变换和产生序列的图像加密方法，并详细介绍了该加密方法的步骤、特点和实验结果。本文所提方法将切比雪夫变换的分数阶扩展至实数域的分数阶向量，另外，使用二维 Logistic 混沌映射生成产生序列，增加了图像加密的密钥空间，同时具有很高的密钥敏感性。加密得到的密文图像是实值图像，其大小与原始图像大小相同，方便显示、传输和存储。实验结果表明，该加密算法能够抵抗统计攻击、穷举攻击、相关性攻击等各种图像攻击，具有很高的安全性。因此，本文提出的图像加密方法可以在图像加密通信领域有很好的应用场景。

参考文献：

[1] 文昌辞, 王沁, 黄付敏, 等. 基于仿射和复合混沌的图像自适应加密算法[J]. 通信学报, 2012, 33(11):119-127.
WEN C C, WANG Q, HUANG F M, et al. Image adaptive encryption algorithm based on affine and compound Chaos[J]. Journal on Communications, 2012, 33(11):119-127.

[2] 邓晓衡, 廖春龙, 朱从旭,等. 像素位置与比特双重置乱的图像混沌加密算法[J]. 通信学报, 2014, 35(3):216-223.
DENG X H, LIAO C L, ZHU C X, et al. Image Chaos encryption algorithm with double displacement of pixel positions and bits [J]. Journal on Communications, 2014, 35(3):216-223.

[3] CATTERMOLE K W. The Fourier transform and its applications[J]. Electronics & Power, 2009, 11(10):357.

[4] ANTONINI M, BARLAUD M, MATHIEU P, et al. Image coding using wavelet transform[J]. IEEE Transactions on Image Processing A Publication of the IEEE Signal Processing Society, 1992, 1(2):205-20.

[5] AHMED N, NATARAJAN T, RAO K R. Discrete cosine transform[J]. IEEE Transactions on Computers, 2006, C-23(1):90-93.

[6] KOMNINOS N, MANTAS G. PEA: polymorphic encryption algorithm based on quantum computation[J]. International Journal of Systems Control & Communications, 2011, 3(3):1-18.

[7] AKHSHANI A, AKHAVAN A, LIM S C, et al. An image encryption scheme based on quantum logistic map[J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2012, 17(12):4653-4661.

[8] EL-LATIF A A A, LI L, WANG N, et al. A new approach to chaotic image encryption based on quantum chaotic system, exploiting color spaces[J]. Signal Processing, 2013, 93(11):2986-3000.

[9] YANG Y G, XIA J, JIA X, et al. Novel image encryption/decryption based on quantum Fourier transform and double phase encoding[J].

Quantum Information Processing, 2013, 12(11):3477-3493.
[10] CANDAN C, KUTAY M A, OZAKTAS H M. The discrete fractional Fourier transform[C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing.1999:1713-1716 .
[11] CARIOLARO G, ERSEGHE T, KRANIAUSKAS P. The fractional discrete cosine transform[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(4):902-911.
[12] LIU X, HAN G, WU J, et al. Fractional Krawtchouk transform with an application to image watermarking[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, PP(99):1.
[13] 陶然, 邓兵, 王越. 分数阶 FOURIER 变换在信号处理领域的研究进展[J]. 中国科学 信息科学:中国科学, 2006, 36(2):113-136.
TAO R, DENG B, WANG Y. Research progress in fractional Fourier transform in signal processing [J]. Science China Information Science: Science China, 2006, 36 (2): 113-136.
[14] KANG X, TAO R, ZHANG F. Multiple-parameter discrete fractional transform and its applications[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(13):3402-3417.
[15] LIMA J B, NOVAES L F G. Image encryption based on the fractional Fourier transform over finite fields[J]. Signal Processing, 2014, 94(1):521-530.
[16] SUI L. Asymmetric double-image encryption method by using iterative phase retrieval algorithm in fractional Fourier transform domain[J]. Optical Engineering, 2014, 53(2):026108.
[17] ZHOU N, LIU X, ZHANG Y, et al. Image encryption scheme based on fractional Mellin transform and phase retrieval technique in fractional Fourier domain[J]. Optics & Laser Technology, 2013, 47(4):341-346.
[18] TAO R, XIN Y, WANG Y. Double image encryption based on random phase encoding in the fractional Fourier domain[J]. Optics Express, 2007, 15(24):16067-16079.
[19] REFREGIER P, JAVIDI B. Optical image encryption based on input plane encoding and Fourier plane random encoding[J]. Optics Letters, 1995, 20(7):767.
[20] UNNIKRISHNAN G, JOSEPH J, SINGH K. Optical encryption by double-random phase encoding in the fractional Fourier domain[J]. Optics Letters, 2000, 25(12):887.
[21] JOSHI M, SHAKHER C, SINGH K. Fractional Fourier plane image encryption technique using radial hilbert, and jigsaw transform[J]. Optics & Lasers in Engineering, 2010, 48(7-8): 754-759.
[22] LANG J, TAO R, WANG Y. Image encryption based on the multiple-parameter discrete fractional Fourier transform and chaos function[J]. Optics Communications, 2010, 283(10):2092-2096.
[23] WU J, GUO F, ZENG P, et al. Image encryption based on a reality-preserving fractional discrete cosine transform and a Chaos-based generating sequence[J]. Journal of Modern Optics, 2013, 60(20): 1760-1771.
[24] WU J H, ZHANG L, ZHOU N R, et al. Image encryption based on the multiple-order discrete fractional cosine transform[J]. Optics Communications, 2010, 283(9):1720-1725.
[25] XIAO B, MA J F, CUI J T. Radial Tchebichef moment invariants for image recognition[J]. Journal of Visual Communication & Image Representation, 2012, 23(2):381-386.
[26] DAI X B, SHU H Z, LUO L M, et al. Reconstruction of tomographic images from limited range projections using discrete Radon transform and Tchebichef moments[J]. Pattern Recognition, 2010, 43(3): 1152-1164.
[27] MUKUNDAN R, ONG S H, LEE P A. Image analysis by Tchebichef moments[J]. IEEE Transactions on Image Processing a Publication of the IEEE Signal Processing Society, 2001, 10(9):1357-64.
[28] DENG C, GAO X, LI X, et al. A local Tchebichef moments-based robust image watermarking[J]. Signal Processing, 2009, 89(8): 1531-1539.
[29] YAP P T, RAVEENDRAN P. Image focus measure based on Chebyshev moments[J]. IEEE Proceedings-Vision, Image and Signal Processing, 2004, 151(2):128-136.
[30] ZHANG L, QIAN G, XIAO W, et al. Geometric invariant blind image watermarking by invariant Tchebichef moments[J]. Optics Express, 2007, 15(5):2251.
[31] XIAO B, LU G, ZHANG Y, et al. Lossless image compression based on integer discrete Tchebichef transform[J]. Neurocomputing, 2016, 214(C):587-593.

[作者简介]

肖斌（1982-），男，重庆人，博士，重庆邮电大学教授，主要研究方向为图像处理、模式识别等。

史文明（1990-），男，河南郸城人，重庆邮电大学硕士生，主要研究方向为图像处理、模式识别。

李伟生（1975-），男，四川南充人，博士，重庆邮电大学教授、博士生导师，主要研究方向为智能信息处理、模式识别、信息融合等。

马建峰（1963-），男，陕西西安人，博士，西安电子科技大学教授、博士生导师，主要研究方向为信息安全、密码学与无线网络安全等。